Vitesse de croissance moyenne des suites aliquotes démarrant avec des nombres pairs
Définition et évolution des coefficients de croissance en fonction du nombre d'itérations
Conjectures de Garambois N°5 et N°6

par
Cédric BARRET et Jean-Luc GARAMBOIS

INTRODUCTION

On cherche ici à évaluer la vitesse de croissance moyenne pour les suites aliquotes démarrant avec des nombres pairs.
Pour cela on a calculé numériquement des valeurs approchées des coefficients :

- D_k : coefficient de croissance moyen d'une suite aliquote démarrant avec des nombres pairs au bout de k itérations.
- C_k : coefficient de croissance moyen d'une suite aliquote démarrant avec des nombres pairs entre l'itération k-1 et l'itération k.

On a constaté avec étonnement que les coefficients C_k ne sont pas constants et qu'ils croissent avec le nombre d'itération, contrairement à ce que l'on pensait initialement.

Nous commencerons par présenter les résultats numériques.
Nous ferons ensuite deux observations et présenterons les questions théoriques ouvertes qu'elles amènent.

Rappel :

Une suite aliquote démarrant avec un nombre pair garde quasiment tous ses termes pairs : il est très peu probable que l'un de ses termes devienne impair dès que les termes atteignent une certaine taille. Voir démonstration.

http://www.aliquotes.com/

PRESENTATION DES RESULTATS NUMERIQUES

Notations :

Soit σ(n) la somme des diviseurs de n.
Soit σ'(n) la somme des diviseurs stricts de n, la fonction d'itération pour calculer une suite aliquote.
On pose σ'(n)=S(n) pour des commodités d'écriture et pour respecter les notations en usage sur différents sites qui traitent des suites aliquotes.
Précisons que S(S(n)) sera noté $S_2(n)$, que S(S(S(n))) sera noté $S_3(n)$ et plus généralement, S(S(S(S…….)))) sera noté $S_k(n)$ si on itère k fois par la fonction S en démarrant avec le nombre n.

Avant de présenter les résultats du programme, on se familiarisera avec les notations utilisées plus bas, en prenant quelques exemples avec les premières suites aliquotes démarrant sur des nombres pairs, voir le tableau juste ci-dessous :

	entiers pairs	Itération 1	Itération 2	Itération 3	...	Itération k
	2 4 6 8 … … … 2i … … … 2N	S(2)=1 S(4)=3 S(6)=6 S(8)=7 … … … S(2i) … … … S(2N)	$S_2(2)=0$ $S_2(4)=1$ $S_2(6)=6$ $S_2(8)=1$ … … … $S_2(2i)$ … … … $S_2(2N)$	… $S_3(4)=0$ $S_3(6)=6$ $S_3(8)=0$ … … … $S_3(2i)$ … … … $S_3(2N)$	… … … … … … … … … … … …	… … $S_k(6)=6$ … … … … $S_k(2i)$ … … … $S_k(2N)$
Somme des colonnes	N(N+1)	$\sum_{i=1}^{N} S(2i)$	$\sum_{i=1}^{N} S_2(2i)$	$\sum_{i=1}^{N} S_3(2i)$	…	$\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)$

http://www.aliquotes.com/

Le programme informatique :

On a calculé les suites aliquotes jusqu'à l'itération k=16 pour tous les entiers pairs jusqu'à 2N=2 000 000 000. Ce calcul a pris une vingtaine de jours. On notera qu'il y a des suites aliquotes pour lesquelles il est impossible de calculer les 16 termes. En effet, il se peut que l'on tombe sur un carré parfait ou le double d'un carré parfait et donc que les termes de la suite deviennent impairs, voire premiers. Dans ce dernier cas, le terme suivant vaudra 1 et encore le suivant vaudra 0. La suite s'arrête donc là.
Ces suites sont très minoritaires et on en a tenu compte d'une part en retirant des calculs des moyennes les termes nuls et d'autre part en ne les retirant pas. Cela ne change pas les propriétés de convergence dont il sera question plus bas puisque les deux manières de faire donnent les mêmes constantes de convergence et cela d'autant mieux que l'on va loin dans les calculs.
Voici reportés les résultats du programme dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Nombre d'itérations k	$\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{S_k(2i)}{2i}$	$\frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} 2i}$	Limites théoriques des colonnes C et D	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{S_k(2i)}{S_{k-1}(2i)}$	$\frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S_{k-1}(2i)}$	Limites théoriques de la colonne G	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{S(2i)}{2i}\right)^k$
0	N(N+1)= '1000000001000000000'							
1	'1056167583918193298'	1,0561675730	1,05616758286	(5/24)*π^2-1=$C_1=D_1$	1,0561675730	1,0561675836	$C_1=D_1$	1,0561675729968
2	'1265137472151546875'	1,2642703256	1,26513747089	inconnue=$C_1C_2=D_2$	1,0514665561	1,1978567525	inconnue=$C_2=D_2/D_1$	1,3202495347624
3	'1717411790382491153'	1,7153377338	1,71741178867	inconnue=$C_1C_2C_3=D_3$	1,0798654348	1,3574902556	inconnue=$C_3=D_3/D_2$	1,9129413969650
4	'2550414676067147088'	2,5455076038	2,55041467352	inconnue=$C_1C_2C_3C_4=D_4$	1,0893883459	1,4850338692	inconnue=$C_4=D_4/D_3$	3,1328032771777
5	'4068320385883718999'	4,0568557873	4,06832038182	inconnue=$C_1...C_5=D_5$	1,1000173321	1,5951603573	inconnue=$C_5=D_5/D_4$	5,6700631224279
6	'6866110981898108136'	6,8397519019	6,86611097503	inconnue=$C_1...C_6=D_6$	1,1074796485	1,6877016387	inconnue=$C_6=D_6/D_5$	11,142099356355
7	'12153135305085815217'	12,0928727943	12,15313529293	inconnue=$C_1...C_7=D_7$	1,1157639122	1,7700173121	inconnue=$C_7=D_7/D_6$	23,455825683928
8	'22402773248028117386'	22,2657039257	22,40277322563	inconnue=$C_1...C_8=D_8$	1,1224866638	1,8433739678	inconnue=$C_8=D_8/D_7$	52,364818828986
9	'42794014216791158471'	42,4824674259	42,79401417400	inconnue=$C_1...C_9=D_9$	1,1296374425	1,9102105683	inconnue=$C_9=D_9/D_8$	123,00935347740
10	'84345848616392684578'	83,6293653844	84,34584853205	inconnue=$C_1...C_{10}=D_{10}$	1,1357953489	1,9709730475	inconnue=$C_{10}=D_{10}/D_9$	302,17072286118
11	'170931917796180019639'	169,2746684170	170,93191762525	inconnue=$C_1...C_{11}=D_{11}$	1,1422222963	2,0265599386	inconnue=$C_{11}=D_{11}/D_{10}$	772,30551535603
12	'355029835723577853899'	351,1489762965	355,02983536855	inconnue=$C_1...C_{12}=D_{12}$	1,1478767508	2,0770248196	inconnue=$C_{12}=D_{12}/D_{11}$	2045,1502192476
13	'753991173913153654081'	744,7310645166	753,99117315916	inconnue=$C_1...C_{13}=D_{13}$	1,1536816474	2,1237403115	inconnue=$C_{13}=D_{13}/D_{12}$	5591,3978638680
14	'1634112050489496277213'	1611,7223012347	1634,1120488554	inconnue=$C_1...C_{14}=D_{14}$	1,1588718318	2,1672827309	inconnue=$C_{14}=D_{14}/D_{13}$	15734,635960415
15	'3610305543823830833482'	3555,1978892620	3610,3055402135	inconnue=$C_1...C_{15}=D_{15}$	1,1641481798	2,2093378130	inconnue=$C_{15}=D_{15}/D_{14}$	45456,299746536
16	'8124699019723964882478'	7986,6435529921	8124,6990115993	inconnue=$C_1...C_{16}=D_{16}$	1,1688579539	2,2504186754	inconnue=$C_{16}=D_{16}/D_{15}$	134504,60238563

http://www.aliquotes.com/

On notera que les premières valeurs des colonnes C et D donnent la valeur théorique en-haut de la colonne E avec respectivement 7 et 8 décimales exactes.
On remarquera que l'on peut passer facilement de la colonne D à la colonne G et vice-versa (produit télescopique) :

- le produit de toutes les valeurs de la colonne G donne exactement la valeur au bas de la colonne D, aux arrondis près ;
- les valeurs de la colonne G peuvent être obtenues en divisant les valeurs consécutives de la colonne D.

On pourrait aussi conjecturer que toutes les valeurs de la colonne F vont converger vers la valeur théorique connue de la colonne E, certains d'entre nous le pensent.
La colonne H contient des valeurs demandées par Youssef CHTAIBI pour ses propres travaux : c'est cette demande qui a été à l'origine de toutes ces nouvelles recherches.

PREMIERE OBSERVATION ET PREMIERES QUESTIONS

Les valeurs entre les colonnes C et D semblent correspondre.
Ceci amène à énoncer deux nouvelles conjectures.

Conjecture de Garambois N°5 (premier énoncé) :

La limite $\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} 2i}$ *est finie.*

Cette limite est notée D_k *et est appelée coefficient de croissance moyen d'une suite aliquote démarrant avec des nombres pairs au bout de k itérations.*

La conjecture de Garambois N°5 a déjà été prouvée pour le cas k=1 et l'on sait que $D_1=(5/24)*\pi\string^2-1$.
Outre l'existence des D_k, obtenir une formule explicite des D_k dans le cas général serait aussi très intéressant !
Nous y reviendrons plus loin.

http://www.aliquotes.com/

Conjecture de Garambois N°6 :

$$\textit{Les limites} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} 2i} \quad \textit{et} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{S_k(2i)}{2i} \quad \textit{sont finies et vérifient :}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} 2i} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{S_k(2i)}{2i}$$

Le fait que le coefficient de croissance moyen soit égal à la moyenne point par point des coefficients de croissance peut paraître choquant.
Cependant Cédric BARRET et Francis JAMM ont démontré que :

$$Si \quad x_i = O(i), \quad avec \quad x_i > 0 \quad alors, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{\sum_{i=1}^{N} i} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{i}$$

La démonstration de ce résultat permet empiriquement de comprendre pourquoi la conjecture de Garambois N°6 semble correcte : même si S(n) n'est pas un grand O de n (car S(n)/n n'a pas une limite finie non nulle lorsque n tend vers l'infini), S(n) est « presque » en O(n) sauf pour quelques cas rares d'entiers (ce qui n'a aucun sens mathématique, mais c'est juste pour se faire une idée !)(et peut-être que la caractérisation des ces « cas rares » est une piste pour la démonstration…).

DEUXIEME OBSERVATION ET NOUVELLES QUESTIONS

Les termes des colonnes F et G ne semblent pas correspondre.

On notera que jusqu'ici, on a toujours cru que les valeurs de la colonne G devaient être celles de la colonne F et donc que le facteur de croissance moyen des suites aliquotes qui démarrent avec des nombres pairs devait être constant au fur et à mesure que l'on itère !

C'était à la base de toute une partie de travaux présentés dans notre pdf : Infirmer la conjecture de Catalan (facteur T constant qui est devenu C(k), variable en fonction de k dans ce pdf).

Cela sera à compléter dès que nous en saurons davantage sur la forme des coefficients apparaissant de manière approchée dans la colonne G.

Conjecture de Garambois N°5 (second énoncé) :

La limite $\lim_{N \to \infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S_{k-1}(2i)}$ *est finie.*

Cette limite est notée C_k *et est appelée coefficient de croissance moyen d'une suite aliquote démarrant avec des nombres pairs entre l'itération k-1 et l'itération k.*

On peut montrer que les deux énoncés de la conjecture de Garambois N°5 sont équivalents et que l'on a :

$C_k = D_k / D_{k-1}$ $D_k = C_1C_2\ldots C_k$

En effet :

- Supposons le premier énoncé vérifié.

  Alors :

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S_{k-1}(2i)} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S(2i)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} S_{k-1}(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S(2i)}} \text{ tend vers } \frac{D_k}{D_{k-1}} \text{ lorsque } N \text{ tend vers l'infini.}$$

  D'où l'existence de C_k et le second énoncé.

- Supposons le second énoncé vérifié.

  Alors :

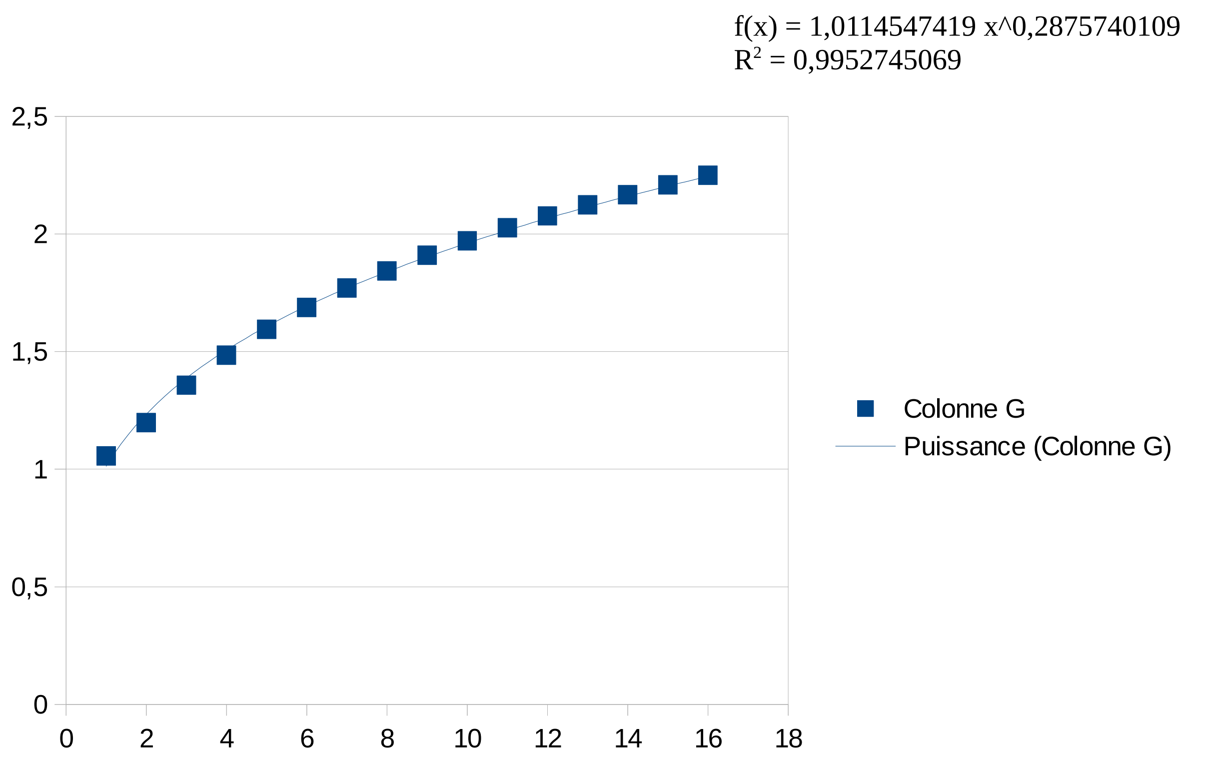
$$\frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S(2i)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S_{k-1}(2i)} \times \frac{\sum_{i=1}^{N} S_{k-1}(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S_{k-2}(2i)} \times \ldots \times \frac{\sum_{i=1}^{N} S_1(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S(2i)} \text{ tend vers } C_k \times C_{k-1} \times C_{k-2} \times \ldots \times C_1 \text{ lorsque } N \text{ tend vers l'infini.}$$

  D'où l'existence de D_k et le premier énoncé.

Une fois l'existence des coefficients D_k et C_k acquise (ie une fois la conjecture de Garambois N°5 démontrée sous l'une ou l'autre de ses formes), il s'agira d'obtenir une formule explicite pour ces coefficients !

http://www.aliquotes.com/

Pour cela, tentons d'analyser les données du tableau ci-dessous en traçant le nuage de points de la colonne G (ie des valeurs numériques trouvées pour les C_k) en fonction de k, ainsi qu'une courbe de tendance :



La seule solution pour le moment pour déterminer les coefficients C_k est de poursuivre le calcul numérique.

On notera que si nous sommes à 7 ou 8 décimales de correspondance entre les valeurs expérimentales et la valeur théorique pour C_1, nous ne sommes même pas certains d'avoir deux décimales exactes pour C_2 et C_3. Et alors que dire des coefficients suivants !

Il va donc falloir continuer les calculs bien au-delà de 2N=2 000 000 000 pour préciser les valeurs numériques de ces coefficients C et D.

Nous prévoyons aussi de lancer un programme qui au lieu d'aller jusqu'à k=16 itérations irait jusqu'à 32, voire 64. De cette manière, nous aurons plus de points pour trouver la forme de nos courbes, mais les calculs seront très longs ! Peut-être nous apercevrons-nous que les calculs convergent trop lentement et que nous déciderons d'arrêter si les temps d'attente devaient ne plus être raisonnables !

Nous prévoyons de plus de lancer un programme en ne faisant le travail qu'avec trois itérations pour aller très vite et pour essayer de trouver C_2 et C_3 avec 4 ou 5 décimales exactes en un temps raisonnable. Après cela, nous pourrions avec une sorte « d'inverseur » essayer de retrouver leur forme que nous soupçonnons être « à base » du nombre π.

En effet, nous nous avançons à faire une nouvelle conjecture, mais il est bien trop tôt pour pouvoir l'énoncer clairement :

Comme on sait que :

$$C_1=\frac{5}{24}\times\pi^2-1$$

On peut supposer (espérer !) que d'une manière générale, on aura : $C_k(ou\ D_k\ ?)=\frac{a_k}{b_k}\times\pi^{e_k}+d_k$

avec, on l'espère : $(a_k, b_k, d_k, e_k)\in N^4$

Durée probable des calculs pour avoir assez de décimales pour C_2 et C_3 : plusieurs mois, voire plusieurs années !!!

Cliquer ici pour suivre l'état d'avancement des calculs en cours : http://www.aliquotes.com/moyennes_calculs.htm

CONCLUSION : DE NOUVEAUX PROBLEMES OUVERTS

Premier problème ouvert :

Prouver l'existence des coefficients C_k et D_k (conjecture de Garambois N°5).

Second problème ouvert :

Trouver une expression explicite de $C_k = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} S_{k-1}(2i)}$ et de . $D_k = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} S_k(2i)}{\sum_{i=1}^{N} 2i}$

Il semble peut-être plus facile de s'attaquer d'abord aux D_k.

Voire même d'abord à D_2 !!

On rappelle que l'on sait déjà que $C_1 = D_1 = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} S(2i)}{\sum_{i=1}^{N} 2i} = \frac{5}{24}\times\pi^2-1$.

http://www.aliquotes.com/

Posée autrement, cette question deviendrait :

Comme on peut démontrer que (voir ici, partie 2 de la page) :

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma(2i) \underset{N \to \infty}{\sim} N^2\left(\frac{5}{24}\times\pi^2\right) \quad \textit{implique que} \quad \sum_{i=1}^{N} \sigma'(2i) = \sum_{i=1}^{N} S(2i) \underset{N \to \infty}{\sim} N^2\left(\frac{5}{24}\times\pi^2-1\right)$$

ou que :

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma(i) \underset{N \to \infty}{\sim} N^2\left(\frac{1}{2}\,\zeta(2)\right) = N^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{6}\right)$$

établir que :

$$\sum_{i=1}^{N} S_2(2i) \underset{N \to \infty}{\sim} ???$$

et plus généralement que :

$$\sum_{i=1}^{N} S_k(2i) \underset{N \to \infty}{\sim} ???$$

Qui saurait remplacer les trois « ? » par ce qui convient dans les deux expressions ci-dessus ?
Cela semble très difficile.

http://www.aliquotes.com/

Ce serait déjà très intéressant et peut-être plus simple (!) si quelqu'un savait remplacer les trois « ? » dans l'expression ci-dessous :

$$\sum_{i=1}^{N} S_2(i) \underset{N \to \infty}{\sim} ???$$

Ce problème est d'ailleurs intéressant en théorie des nombres indépendamment des suites aliquotes.

<u>Troisième problème ouvert</u> :

Prouver la conjecture de Garambois N°6.

Sans les interrogations de Youssef CHTAIBI, les travaux exposés dans ce pdf n'auraient jamais vu le jour.
Ces travaux ont été vérifiés et corroborés par Cédric BARRET et Francis JAMM.