Autour de la densité des entiers n divisibles par un certain entier m tel que m ne divise pas $\sigma(n)$-(n)

Théorème CHTAIBI-GARAMBOIS

15/05/2012

http://www.aliquotes.com

1 Introduction

Le but de cet article est d'exposer la preuve d'un théorème concernant la densité des entiers n divisibles par un certain entier m tel que m ne divise pas $\sigma(n)$-(n) qu'on démontrera dans la suite qu'elle est nulle en donnant une majoration asymptotique de ces nombres n inférieurs à un réel x.

2 Notations et Définitions

Dans toute la suite :

On fixe m un entier naturel ≥ 3 .

x et t désigneront des nombres réels positifs.

On définit les fonctions somme des diviseurs et somme des diviseurs propres comme suit :

$$\sigma(n) = \sum_{d|k} d. \tag{1}$$

Et

$$\sigma'(n) = \sigma(n) - n. \tag{2}$$

Et on définit aussi la fonction $\phi(n)$: indicateur d'Euler qui compte le nombre des entiers $\leq n$ qui sont premiers avec n.

3 Théorème CHTAIBI-GARAMBOIS

La densité (asymptotique) des entiers n divisibles par m tel que m ne divise pas $\sigma'(n)$ est nulle.

Et on a en plus la majoration asymptotique suivante pour tout nombre réel x suffisement grand :

$$A_m(x) := card\{n \leq x \ tel \ que \ m|n \ et \ m \not| \sigma'(n)\} = O\left(\frac{x}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{\phi(m)}}}\right). \tag{3}$$

4 Preuve du théorème

Pour pouvoir démontrer le théorème on aura besoin de prouver le lemme intermédiaire suivant :

5 Lemme

Pour tout nombre réel x suffisement grand on a :

$$S_m(x) := card\{n \leq x \ tel \ que \ m \not| \sigma(n)\} = O\left(\frac{x}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{\phi(m)}}}\right). \tag{4}$$

6 Preuve du lemme

Soient x et t deux réels suffisement grands tel que : $1 \ll t \ll x$.

Il est clair que si il existe un nombre premier q tel que $q \equiv -1[m]$, $q|n$ et $q^2 \not|$ n alors on aura $m|\sigma(n)$.

Soient $q_1 < q_2 < ....$ les nombres premiers tel que $q_i \equiv -1[m]$.

Et d'après un corolaire du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques on a :

$$\sum_{q\leq t, q\equiv -1[m]} \frac{1}{q} = \frac{\ln\ln t}{\phi(m)} + O(1)\,. \tag{5}$$

Et on en déduit que :

$$\sum_{q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]} \frac{q_i-1}{q_i^2} = \frac{\ln\ln t}{\phi(m)} + O(1)\,. \tag{6}$$

Maintenant on va considérer le produit suivant : $\prod_{q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]}(1-\frac{q_i-1}{q_i^2})$,
On sait que pour tout réel y tel que $0\leq y<1$ on a l'inégalité suivante:

$$\ln(1-y)\leq -y. \tag{7}$$

Donc :

$$\ln(\prod_{q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]}(1-\frac{q_i-1}{q_i^2}))\leq -(\sum_{q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]}\frac{q_i-1}{q_i^2}) \tag{8}$$

D'òu :

$$\ln(\prod_{q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]}(1-\frac{q_i-1}{q_i^2}))\leq -(\frac{\ln\ln t}{\phi(m)})+O(1) \tag{9}$$

Et on en déduit que :

$$\prod_{q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]}(1-\frac{q_i-1}{q_i^2})) = O\left(\exp(\frac{-\ln\ln t}{\phi(m)})\right) = O\left(\frac{1}{(\ln t)^{\frac{1}{\phi(m)}}}\right) \tag{10}$$

Maintenant on va considérer le produit suivant :

$$Q_t = \prod_{q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]} q_i \tag{11}$$

Si pour un certain entier a tel que $1\leq a\leq Q_t^2$ et pour un nombre premier q_i ($q_i\leq t, q_i\equiv -1[m]$) on a $q_i|a$ et $q_i^2\not|$ a et $n\equiv a[m]$ alors on aura $m|\sigma(n)$.
En appliquant le crible d'Eratosthènes, on trouvera que le nombre des classes de

residus (mod Q_t^2) pour lesquels la propriété précédente n'est pas vérifiée pour aucun indice i est égale à :

$$Q_t^2 \prod_{q_i \leq t, q_i \equiv -1[m]} (1 - \frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_i^2}) = Q_t^2 \prod_{q_i \leq t, q_i \equiv -1[m]} (1 - \frac{q_i - 1}{q_i^2}) \tag{12}$$

Donc on en déduit que :

$$S_m(x) := card\{n \leq x \ tel \ que \ m \not| \sigma(n)\} \leq (\frac{x}{Q_t^2} + 1) Q_t^2 \prod_{q_i \leq t, q_i \equiv -1[m]} (1 - \frac{q_i - 1}{q_i^2}). \tag{13}$$

D'òu :

$$S_m(x) \leq x \prod_{q_i \leq t, q_i \equiv -1[m]} (1 - \frac{q_i - 1}{q_i^2}) + Q_t^2 \prod_{q_i \leq t, q_i \equiv -1[m]} (1 - \frac{q_i - 1}{q_i^2}). \tag{14}$$

Si on pose $t = \frac{\ln x}{2}$ on aura d'après le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques :

$$\ln(Q_t) \sim \frac{\ln x}{2\phi(m)} \tag{15}$$

D'où

$$\ln(Q_t^2) \sim \frac{\ln x}{\phi(m)} \tag{16}$$

Et puisque $2 \leq \phi(m)$ car $3 \leq m$ alors :

$$Q_t^2 = o(x) \tag{17}$$

Donc :

$$S_m(x) = O\left(x \prod_{q_i \leq t, q_i \equiv -1[m]} (1 - \frac{q_i - 1}{q_i^2}) \right). \tag{18}$$

D'où le résultat suivant :

$$S_m(x) = O\left(\frac{x}{(\ln \ln x + \ln(\frac{1}{2}))^{\frac{1}{\phi(m)}}} \right) = O\left(\frac{x}{(\ln \ln x)^{\frac{1}{\phi(m)}}} \right) \tag{19}$$

CQFD.

7 Suite de la preuve du théorème

Maintenant on va utiliser le lemme et on commencera par remarquer que si $m|n\ et\ m\not|\sigma'(n)$ alors $m\not|\sigma(n)$.

Donc :

$$\{n \leq x\ tel\ que\ m|n\ et\ m\not|\sigma'(n)\} \subset \{n \leq x\ tel\ que\ m\not|\sigma(n)\}. \tag{20}$$

D'où :

$$A_m(x) := card\{n \leq x\ tel\ que\ m|n\ et\ m\not|\sigma'(n)\} \leq S_m(x) := card\{n \leq x\ tel\ que\ m\not|\sigma(n)\} \tag{21}$$

Et on en déduit d'après le lemme :

$$A_m(x) := card\{n \leq x\ tel\ que\ m|n\ et\ m\not|\sigma'(n)\} = O\left(\frac{x}{(\ln\ln x)^{\frac{1}{\phi(m)}}}\right) \tag{22}$$