Les suites aliquotes

Site actif de recherche
Résumé des travaux présentés sur ce site

Retour à page d'accueil

La présente page a pour but de résumer de manière succincte les travaux inédits dont il est fait mention sur ce site et que l'on ne trouve pas sur d'autres sites sur les suites aliquotes. Nous ne reprendrons pas ici les définitions de base.

Théorème de Barbulescu-Garambois et théorème de Chtaibi-Garambois

Depuis que ce site a été mis en ligne le 8 septembre 2010, il a permis deux avancées majeures dans la connaissance des suites aliquotes :

Ce qui était ici présenté comme la deuxième conjecture de Garambois est devenu le théorème de Barbulescu-Garambois, à savoir :

Il existe une suite aliquote croissant à chaque itération d'un facteur au moins k pendant i itérations successives, avec k et i aussi grands que l'on veut.

Voir la démonstration de ce théorème faite par Razvan Barbulescu.

Ce qui était ici présenté comme la troisième conjecture de Garambois est devenu le théorème de Chtaibi-Garambois, à savoir :

Un guide dans une suite aliquote a d'autant plus de chances de se conserver au fur et à mesure des itérations, que les termes de la suite aliquote deviennent grands.

Voir la démonstration de ce théorème faite par Youssef Chtaibi.

Principale raison d'être de ce site

La principale raison d’être de ce site est surtout la dernière partie : « Les problèmes ouverts ». En effet, nous avons besoin d'aide pour faire avancer encore les recherches, car certaines questions nous semblent ardues et d'autres demandent de la patience pour écrire des programmes et surtout pour les faire tourner et attendre les résultats !

Le site présente aussi des conjectures dont certaines pourront devenir des théorèmes démontrés alors que d'autres pourront être reformulées ou abandonnées au fur et à mesure que les recherches avanceront.
On trouvera aussi un énoncé de certaines de ces conjectures ci-dessous.

Principales avancées présentées sur ce site dont il n'est fait mention nulle part ailleurs :

1) Notion de chaîne aliquote isolée proposée par Jean-Luc Garambois

Une chaîne aliquote peut avoir un maillon (nombres parfaits comme 6, 28 ou 496), deux maillons (nombres amis de Pythagore comme 220 et 284) ou plus.
Une chaîne aliquote isolée est une chaîne aliquote sur laquelle aucune suite aliquote démarrant sur un nombre n'appartenant pas à cette chaîne ne peut aboutir.
Ainsi, 6 est un nombre parfait qui n'est pas isolé sur le graphe infini des suites aliquotes, car la suite aliquote démarrant sur l'entier 25 aboutit sur le nombre parfait 6.
Par contre, 28 est un nombre parfait isolé sur le graphe infini des suites aliquotes, car il ne possède qu'un seul antécédent aliquote : lui-même et aucun autre.
Toute chaîne aliquote dont tous les entiers qui en constituent les maillons n'ont rigoureusement qu'un seul antécédent aliquote sont donc des chaînes aliquotes isolées.
Plusieurs couples de nombres amis de Pythagore sont identifiés aujourd'hui comme des chaînes aliquotes isolées à deux maillons. (En obtenir la liste).
A part ces couples de nombres amis de Pythagore et le nombre parfait 28, aucune autre chaîne aliquote isolée n'est connue pour le moment, mais il doit en exister de nombreuses encore à découvrir, dont certaines à plus de 2 maillons.
Notons que Andrew R. Booker, de l'université de Bristol a généralisé cette notion pour considérer les "composantes finies" du graphe infini des suites aliquotes. Il s'agit d'une chaîne aliquote sur laquelle peuvent tomber d'autres suites aliquotes, mais si l'on remonte ces suites aliquotes à l'envers, on aboutit à des nombres intouchables. En d'autres termes, on ne peut jamais remonter à l'infini à l'envers de telles suites aliquotes, qui ont donc une taille finie.
Voir l'Article de Andrew R. BOOKER.

2) Notion de suite aliquote à forts coefficients de croissance proposée par Jean-Luc Garambois

Le mieux est d'expliquer la chose en montrant directement des exemples.

L'entier 19560 croit à chaque itération d'un facteur k au minimum égal à 2. Paul Zimmermann a poussé les calculs jusqu'à l'itération 590 et on atteint des nombres de 205 chiffres, sans que cela ne change.

Pour l'entier 620542913760, le facteur k supérieur à 3 tient jusqu'à l'itération 234 où l'on atteint un nombre de 129 chiffres.

L'entier 9900243648828670255121203200 =
215×35×52×72×11×13×17×19×31×43×211×257×303997 garde un facteur de croissance k supérieur ou égal à 4 sur 97 itérations successives.

Bien d'autres exemples sont présentés sur cette page du site, jusqu'à k=10...

On notera l'intérêt évident d'étudier aussi les suites à coefficients k supérieurs ou égaux à 1, c'est à dire strictement croissantes.

Pour k=1, k=2 ou k=3, nous connaissons des suites qui gardent ces facteurs minimaux de croissance aussi loin que nous ayons pu pousser les calculs.
Pour k pris supérieur ou égal à 4, le facteur devient toujours inférieur ou égal à 4 au bout d'un certain nombre d'itérations grâce aux possibilités de calcul des ordinateurs actuels.
Mais nous devrions trouver des suites pour lesquelles k restera supérieur ou égal à 4 aussi loin que nous pourrons pousser les calculs dans un avenir plus ou moins lointain.

Notons que le facteur minimal de croissance k choisi pour une suite ne doit pas forcément être pris comme un nombre entier. Mais seuls ces derniers cas on été étudiés pour le moment par notre équipe.

Une méthode très performante de recherche des suites aliquotes à forts coefficients de croissance a été trouvée empiriquement par Jean-Luc Garambois :

On cherche une suite aliquote qui croit à chaque itération d'un facteur au moins égal à l'entier k sur i itérations. Pour cela, on prend le plus petit nombre entier m qui est (k+1)-parfait, et on teste les suites aliquotes ayant pour départ les entiers n=zm, avec z prenant toutes les valeurs entières aussi loin que nécessaire pour obtenir le k désiré sur le nombre i d'itérations désiré.

Voir les plus petits entiers (k+1)-parfait pour k=1 à 10.

3) Une suite aliquote a tendance à conserver un "guide" sur plusieurs itérations successives, chose remarquée par beaucoup de monde, mais argumentée par notre équipe

Conservation du guide 2 qui est aussi un "driver"

Si l'on prend un entier n pair comme le départ d'une suite aliquote, les termes successifs de la suite aliquote "ont tendance" à rester pairs, car seuls les carrés parfaits et leurs doubles autorisent un changement de parité lorsqu'on leur applique la fonction "somme des parties aliquotes" (σ'). Voir la démonstration. On dit aussi que le guide 2 de la suite aliquote est conservé.
Le fait que ce ne sont que les carrés parfaits ou leurs doubles implique une raréfaction des nombres qui autorisent un changement de parité par la fonction σ', lorsqu'on considère des entiers de plus en plus grands.

Conservation du guide 3

Si l'on prend tous les entiers n divisibles par 3, ceux pour lesquels σ'(n) ne reste pas divisible par 3 sont tous sans exception des nombres appelés "nombres de Loeschian" de la forme x^2+xy+y^2, avec x et y entiers. Cela a été conjecturé par Jean-Luc Garambois et démontré par Razvan Barbulescu (Voir la démonstration). Attention, la réciproque n'est pas forcément vraie : il existe des nombres de Loeschian divisibles par 3 qui ne perdent pas leur divisibilité par 3 quand on leur applique la fonction σ' . Razvan Barbulescu a de plus démontré que les entiers n divisibles par 3 qui ne le restent pas lorsqu'on leur applique la fonction σ' se raréfiaient eux aussi lorsqu'on considère des entiers de plus en plus grands : Voir cette démonstration.

Conservation du guide p, avec p un nombre premier supérieur à 3

Quant à la raréfaction des nombres n divisibles par p, avec p premier supérieur à 3, qui ne conservent pas le guide p lorsqu'on leur applique la fonction σ', cette raréfaction n'est observée qu'à l'aide de l'ordinateur et n'est en aucun cas démontrée lorsqu'on considère des entiers de plus en plus grands. Cliquer ici pour voir des arguments numériques.

Conservation des guides composés

La raréfaction des nombres n qui ne conservent pas des guides composés comme par exemple 8=2^3 est également observée si l'on considère des entiers de plus en plus grands. Cliquer ici pour voir des arguments numériques.

Cela nous a finalement incités à formuler la conjecture de Garambois N°3 aujourd'hui devenue le théorème de Chtaibi-Garambois (voir au début de cette page) :

Un guide dans une suite aliquote a d'autant plus de chances de se conserver au fur et à mesure des itérations, que les termes de la suite aliquote deviennent grands.

Conservation exceptionnelle de certains guides particuliers

Les drivers 6=2*3 ou alors 120=2^3*3*5 ou alors le guide 30240=2^5*3^3*5*7 semblent se conserver significativement mieux que les autres du même ordre de grandeur au fur et à mesure des itérations dans une suite aliquote. Cliquer ici pour voir des arguments numériques.
Ces guides ne sont pas quelconques puisque ce sont respectivement les plus petits nombres 2-parfaits, 3-parfaits et 4-parfaits.

Cela nous a finalement incités à formuler la conjecture de Garambois N°4 :

Dans les termes d'une suite aliquote, un guide k-parfait se conserve significativement mieux qu'un autre guide du même ordre de grandeur.

Il serait fondamental de réussir à caractériser tous les nombres n multiples d'un de ces guides particuliers tels que σ'(n) reste aussi un multiple du même guide, mais cela semble difficile. On notera cependant que c'est le cas pour tous les entiers n de la forme n=qp, avec q un nombre k-parfait et p un nombre premier autre que ceux qui décomposent le guide q. Voir la démonstration. Mais ce ne sont pas ces seuls nombres qui expliquent que très rapidement, plus de la moitié des multiples de ces guides particuliers restent des multiples de ces guides si on leur applique la fonction σ'.
*Rappelons encore une fois que la capacité à se conserver dans une suite aliquote n'est pas aussi accentuée pour les guides non k-parfaits du même ordre de grandeur, sauf pour certains semble-t-il qui sont les produits de très petits nombres premiers comme par exemple 360=2^3*3^2*5 et qui ont un très grand nombre de diviseurs.*

Le but à atteindre serait de pouvoir calculer la probabilité de conserver un guide donné composé quelconque dans une suite aliquote sur i itérations, en fonction de la taille de l'entier n qui est le départ de la suite aliquote, de i et de la décomposition en facteurs premiers du guide. Ce guide implique un certain facteur de croissance k minimal de la suite aliquote sur ces i itérations.

C'est pour arriver à cela que nous concentrons nos efforts sur la recherche de formes polynomiales qui engendrent les nombres n multiples de p premier, ne conservant pas leur divisibilité par p quand on leur applique la fonction σ'. On part du principe qu'il sera plus facile de trouver les "lois de raréfaction" de ces nombres avec les formes polynomiales que sans elles. Mais cela n'est pas certain !

4) Formes des nombres n qui ne conservent pas les guides premiers supérieurs à 3 ou les guides composés

Seuls les nombres de la forme x^2 et $2x^2$ avec x entier ne conservent pas le facteur (ou le guide, ou même le driver) 2 quand on leur applique la fonction σ'.

Tous les nombres qui ne conservent pas le guide 3 quand on leur applique la fonction σ' sont de la forme x^2+xy+y^2 avec x et y entiers.

Quelle sont les formes des nombres qui ne conservent pas les autres guides premiers 5, 7... ?

Quels sont les formes des nombres qui ne conservent pas les guides composés et plus particulièrement ceux qui nous intéressent le plus : les guides particuliers qui se conservent mieux que les autres dont nous parlons ci-dessus ?

http://www.aliquotes.com/

Cette recherche semble très difficile et est à la base de plusieurs de nos problèmes ouverts présentés sur le site.

5) Travaux sur les propriétés du graphe infini des suites aliquotes

Voir le graphe infini "topologique" des suites aliquotes pour tous les nombres entiers jusqu'à 100.

Voir le graphe infini des suites aliquotes respectant la "distance" à 1 pour tous les nombres entiers jusqu'à 100.

Ce graphe infini a plusieurs propriétés topologiques et en ce qui concerne les "longueurs" de ses branches.
Ces propriétés sont énoncées sur cette page et sont impossibles à résumer ici.
C'est l'un des domaines les plus prometteurs en ce qui concerne l'étude des suites aliquotes.
On notera que des conjectures sont en train d'être élaborées sur la question : "Tout type d'arbre peut-il exister dans le graphe infini des suites aliquotes ?"
Voir les dessins expliquant les 3 conjectures possibles sur l'existence de tous les graphes dans le graphe infini des suites aliquotes.

6) Questions sur les vitesses de croissance et les coefficients de croissance des suites aliquotes

On établit que la somme de i=1 à N des $\sigma'(2i)$ est équivalente à $N^2[(5/24)\pi^2-1]$ lorsque N tend vers l'infini.
On voudrait de même trouver l'expression analogue qui sera équivalente à la somme de i=1 à N des $\sigma'(\sigma'(2i))$ lorsque N tend vers plus l'infini.
On voudrait de manière plus générale trouver un équivalent du même type pour la somme de i=1 à N des $\sigma'_k(2i)$ lorsque N tend vers plus l'infini, où $\sigma'_k(2i)$ est la $k^{ième}$ itération de 2i par la fonction σ'.
On voudrait prouver les conjectures de Garambois N°5 et N°6 et résoudre les questions ouvertes présentées à la fin de ce document.

7) Autres travaux inédits présentés sur le site

Le site présente encore de nombreux autres problèmes ouverts liés aux suites aliquotes, y compris des défis pour les programmeurs, à résoudre à l'aide de l'ordinateur.

http://www.aliquotes.com/

Le site présente aussi des travaux où l'on a tenté d'appliquer la fonction σ' à autre chose que seulement des entiers : les nombres entiers relatifs, les nombres complexes entiers de Gauss et même les polynômes... (Voir ces travaux).
Cette tentative de généralisation a été faite dans le but de trouver des règles plus générales qui feraient émerger de nouvelles propriétés sur les suites aliquotes invisibles quand on reste dans le cadre plus restreint des entiers naturels.

Dans ce même cadre, ont été étudiés très brièvement d'autres processus d'itération comme $n \to \sigma'(n)-1$ (on ne compte plus le diviseur 1 pour les nombres en itérant) ou plus généralement $n \to \sigma'(n)+b$, avec b étant un nombre entier relatif.

Toutes ces tentatives de généralisation n'ont pas donné de résultats probants pour le moment. Mais ces études peuvent se révéler très intéressantes pour elles-mêmes.

Signalons pour finir cette présentation en langue anglaise du site que des méthodes et des programmes "performants" sont proposés pour déterminer par exemple les nombres d'antécédents aliquotes des entiers ou pour rechercher des chaînes aliquotes isolées.

Tous les résultats avancés ou proposés sont argumentés et le cheminement d'idées qui a permis d'y aboutir est présenté.

Bon courage à tous ceux qui désirent participer à l'aventure !

Dernière modification : 6 janvier 2019
