Théorème CHTAIBI-GARAMBOIS

Definitions :

Soit n un entier naturel non nul :

On définit les deux fonctions σ et σ' comme suit :

$$\sigma(\mathrm{n}) = \sum_{d\,|n} \mathrm{d}$$

Et $$\sigma'(\mathrm{n}) = \sigma(\mathrm{n}) - n$$

Théorème :

a) Le rapport moyen des $\frac{\sigma(\mathrm{n})}{n}$ tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

b) Le rapport moyen des $\frac{\sigma'(\mathrm{n})}{n}$ tend vers $\frac{\pi^2-6}{6}$.

Preuve :

On a pour tout entier naturel non nul k :

$$\frac{\sigma(\mathrm{k})}{k} = \frac{1}{k}\sum_{d\,|k} \mathrm{d} = \frac{1}{k}\sum_{d|k} \frac{k}{d} = \sum_{d|k} \frac{1}{d} \qquad \text{(Formule 1)}$$

Soit :

$$M(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(\mathrm{k})}{k}}{n}$$

Et

$$M'(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma'(\mathrm{k})}{k}}{n}$$

On réécrit M(n) en utilisant la formule 1 :

$$M(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} \frac{1}{d}}{n} = \frac{\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \sum_{\substack{k \leq n \\ d|k}} 1}{n}$$

et on sait que : $\sum_{\substack{k \leq n \\ d|k}} 1 = [\frac{n}{d}]$ avec [x] désigne la partie entière du réel x.

donc :

$$M(n) = \frac{\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} [\frac{n}{d}]}{n}$$

et puisque on a $\frac{n}{d} - 1 \leq \left[\frac{n}{d}\right] \leq \frac{n}{d}$

on en déduit que :

$$\frac{\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \left(\frac{n}{d} - 1\right)}{n} \leq M(n) \leq \frac{\sum_{d=1}^{n} \frac{n}{d^2}}{n}$$

Donc

$$\frac{\sum_{d=1}^{n} \frac{n}{d^2}}{n} - \frac{H(n)}{n} \leq M(n) \leq \frac{\sum_{d=1}^{n} \frac{n}{d^2}}{n}$$

Avec $H(n) = \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}$

D’où :

$$\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d^2} - \frac{H(n)}{n} \leq M(n) \leq \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d^2}$$

Et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{H(n)}{n} = 0$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} M(n) = \frac{\pi^2}{6}$$

D’où le résultat (a) du théorème.

Pour le point (b) il suffit de voir que :

$$M(n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\frac{\sigma'(k)+k}{k})}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma'(k)}{k}}{n} + 1 = M'(n) + 1$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} M'(n) = \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2-6}{6}.$$