www.aliquotes.com

PROPOSITION 2
CONJECTURE DE GARAMBOIS N°7 FORTE
DEMONTREE FAUSSE PAR PAUL ZIMMERMANN
LE 20/10/2015
VOIR FIN D'ARTICLE EN ROUGE
ARTICLE CADUQUE

INFIRMER LA CONJECTURE DE CATALAN
UNE NOUVELLE PISTE
LA CONJECTURE DE GARAMBOIS N°7

par
Jean-Luc GARAMBOIS

avec les conseils avisés de
Cédric BARRET
et
Francis JAMM

RAPPELS ET DEFINITIONS

Un nombre k-parfait est un nombre n tel que σ(n)=kn.

Pour des commodités d'écriture, on appellera s, la fonction itérative permettant de calculer une suite aliquote par itérations successives.
Ainsi, s(n)=σ(n)-n

Conjecture de Catalan sur les suites aliquotes :
Toutes les suites aliquotes aboutissent à l'entier 1 ou à un entier qui fait partie d'une chaîne aliquote.
La conjecture de Catalan affirme donc qu'il n'existe pas de suite aliquote dont les termes croissent indéfiniment.

PROPOSITIONS

Dans cet article, on fera trois propositions :

La proposition 1, contraire à celle de Catalan.
La proposition 2 ou conjecture de Garambois N°7 forte, qui est peut-être inexacte. Par contre, si elle devait être exacte, elle impliquerait que la conjecture de Catalan est fausse, ce qui justifie qu'elle ait été énoncée.
La proposition 3 ou conjecture de Garambois N°7 faible, qui devrait pouvoir être démontrée pour ensuite devenir un théorème.

On démontrera ensuite que la proposition 2 implique la proposition 1 ci-dessous :

<u>Proposition 1</u> :

Il existe des suites aliquotes dont les termes croissent indéfiniment : la conjecture de Catalan est fausse.

<u>Proposition 2 ou conjecture de Garambois N°7 forte</u> :

Soit p_0 un nombre premier et k un nombre entier tel que p_0>k>2.
On calcule p_{i+1} en itérant de la manière suivante : $p_{i+1}=(k-1)\bullet p_i+k$.
Il existe un nombre k et un nombre premier p_0 tel que p_i soit premier pour tout i.

<u>Proposition 3 ou conjecture de Garambois N°7 faible</u> :

Soit p_0 un nombre premier et k un nombre entier tel que p_0>k>2.
On calcule p_{i+1} en itérant de la manière suivante : $p_{i+1}=(k-1)\bullet p_i+k$
Il existe un nombre k et un nombre premier p_0 tel que p_i soit premier pour tout i<I avec I aussi grand que l'on veut.

Pour les propositions 2 et 3 :

On notera que quel que soit i, on a $p_{i+1}>p_i$.

On notera que les k=2 modulo 3 ne semblent pas convenir mais on ne sait pas pourquoi, sauf pour k=2.
Si on prend k=2, alors on a un nombre parfait n, comme 6, 28 ou 496 (s(496)=496).
Et on a $p_{i+1}=(k-1)*p_i+k=p_i+2$.
Cela implique que seules les paires de nombres premiers jumeaux conviennent (une seule itération itération avec deux termes $m_0=p_0*n$ et $m_1=p_1*n$, p_0 et p_1 étant de premiers jumeaux).
*L'unique triplet de nombres premiers espacés de 2 unités : $p_0=3$, $p_1=5$ et $p_3=7$ convient également avec 2 itérations successives, comme la suite aliquote démarrant sur 3*496=1488, dont les trois premiers termes sont :*
*0 .   1488 = 2^4 * 3 * 31*
*1 .   2480 = 2^4 * 5 * 31*
*2 .   3472 = 2^4 * 7 * 31*
*Ainsi, pour tout nombre parfait n (ci-dessus n=496=2^4*31), on n'aura jamais plus de trois itérations consécutives dont les termes seront de la forme $m_i=n*p_i$ avec p_i premiers et on sait même que $p_0=3$, $p_1=5$ et $p_3=7$.*

DEMONSTRATION QUE LA PROPOSITION 2 IMPLIQUE LA PROPOSITION 1

Soit n un nombre k-parfait.
Soit p_0 un nombre premier tel que p_0 est plus grand que tout nombre premier décomposant n.
De plus, on a $p_0>k>2$.

$\sigma(p_0n)=\sigma(n)\bullet\sigma(p_0)$, car la fonction σ est multiplicative si n et p sont premiers entre eux.
$\sigma(p_0n)=kn\bullet\sigma(p_0)=kn(p_0+1)$
D'où :
$s(p_0n)=\sigma(p_0n)-p_0n$
$s(p_0n)=kn(p_0+1)-p_0n=n[(k-1)p_0+k]=np_1$

Ainsi, on procède de la même manière pour calculer s(s(n)) :
$s(s(n))=s(p_1n)=kn(p_1+1)-p_1n=n[(k-1)p_1+k]=np_2$

Et ainsi de suite.

Si l'on démontre la conjecture de Garambois N°7 forte (*Il existe un nombre k et un nombre premier p_0 tel que p_i soit premier pour tout i, avec $p_{i+1}=(k-1)*p_i+k$ et $k>2$*), on aura démontré l'existence d'une suite aliquote à termes strictement croissants, démarrant sur un entier $m_0=p_0n$ et dont le terme i sera de la forme $m_i=np_i$, avec n un nombre k-parfait.

CQFD

Exemple :

Prenons k=4, n=30240=2^5*3^3*5*7 est un nombre 4-parfait et donc s(30240)=3*30240.
Prenons p_0=26314573
p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 et p_9 sont premiers, malheureusement p_{10} n'est plus premier.

Voici donc les 9 premières itérations de la suite aliquote correspondante :

0 . 795752687520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 26314573
1 . 2387258183520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 78943723
2 . 7161774671520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 236831173
3 . 21485324135520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 710493523
4 . 64455972527520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 2131480573
5 . 193367917703520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 6394441723
6 . 580103753231520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 19183325173
7 . 1740311259815520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 57549975523
8 . 5220933779567520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 172649926573
9 . 15662801338823520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 517949779723
10 . 46988404016591520 = 2^5 * 3^3 * 5 * 7 * 19 * 86179 * 948973

NOUVEAUX PROBLEMES OUVERTS

Démontrer les conjectures de Garambois N°7 faible et forte énoncées en début d'article.
La conjecture de Garambois N°7 faible est « pressentie » exacte.
La conjecture de Garambois N°7 forte est moins probablement exacte à cause de la raréfaction des nombres premiers, mais son exactitude impliquerait l'infirmation de la conjecture de Catalan ce qui justifie qu'on essaie de la démontrer, ou de l'infirmer. Mais infirmer la conjecture de Garambois N° 7 forte ne signifierait pas que la conjecture de Catalan est vraie.

NOMBRES HEMIPARFAITS (HEMIPERFECT NUMBERS) ET K SEMI ENTIER

Un nombre n est hémiparfait si σ(n)=kn, avec k semi entier, k>1,5.
24 est hémiparfait car σ(24)=60=2,5*24 et s(24)=36=1,5*24.
4320 est hémiparfait car σ(4320)=15120=3,5*4320 et s(4320)=10800=2,5*4320.

Les propositions 1, 2 et 3 faites plus haut restent valables dans le cas des nombres hémiparfaits avec des valeurs de k semi entières et la proposition 2 implique aussi la proposition 1.

Exemple avec k=2,5 et le driver n=24 :

Les termes de la suite aliquote ci-dessous restent de la forme $24*p_i$ pendant 7 itérations.

0 . 289172588424 = 2^3 * 3 * 12048857851
1 . 433758882696 = 2^3 * 3 * 18073286779
2 . 650638324104 = 2^3 * 3 * 27109930171
3 . 975957486216 = 2^3 * 3 * 40664895259
4 . 1463936229384 = 2^3 * 3 * 60997342891
5 . 2195904344136 = 2^3 * 3 * 91496014339
6 . 3293856516264 = 2^3 * 3 * 137244021511
7 . 4940784774456 = 2^3 * 3 * 205866032269
8 . 7411177161744 = 2^4 * 3 * 31 * 79 * 63045947
9 . 12602128571376 = 2^4 * 3 * 31 * 8469172427

POUR CEUX QUE CELA INTERESSE : COMMENT EST NEE L'IDEE DE CET ARTCLE ?

Cette découverte s'est faite simplement parce qu'on s'est demandé s'il existait des suites aliquotes dont tous les termes m_i sont de la forme $m_i=np_i$ avec n qui est un driver de la suite. C'est alors qu'on s'est aperçu que les nombres premiers p_i allaient croissants.

D'AUTRES TENTATIVES

On s'est ensuite naturellement demandé s'il existait des suites aliquotes dont tous les termes m_i sont de la forme $m_i=np_iq_i$ avec n qui est un driver de la suite.
On a alors déterminé que si n, p_i et q_i sont premiers entre eux, alors on a :
$s(n)=n[(k-1)p_iq_i +k(1+p_i+q_i)]=nf$ avec $f=(k-1)p_iq_i +k(1+p_i+q_i)$.
Et on veut que $f=p_{i+1}q_{i+1}$
Mais à ce moment-là, nous n'avons pas la garantie que les facteurs de f soient des nombres premiers différents de ceux qui composent le driver n.
Nous nous sommes néanmoins amusés à chercher de telles suites aliquotes dont voici un exemple ci-dessous, avec n=120 pour 11 itérations :

0 . 634551240 = 2^3 * 3 * 5 * 1033 * 5119
1 . 1271317560 = 2^3 * 3 * 5 * 167 * 63439
2 . 2565533640 = 2^3 * 3 * 5 * 3469 * 6163
3 . 5134535160 = 2^3 * 3 * 5 * 17 * 2516929
4 . 11175171240 = 2^3 * 3 * 5 * 1723 * 54049
5 . 22370420760 = 2^3 * 3 * 5 * 73 * 2553701
6 . 45660200520 = 2^3 * 3 * 5 * 11 * 34591061
7 . 103773187320 = 2^3 * 3 * 5 * 11 * 78616051
8 . 235848157320 = 2^3 * 3 * 5 * 29 * 67772459
9 . 496094410680 = 2^3 * 3 * 5 * 11 * 375829099
10 . 1127487301320 = 2^3 * 3 * 5 * 151 * 62223361
11 . 2277375067320 = 2^3 * 3 * 5 * 30817 * 615833

Mais cette idée n'est pas porteuse pour infirmer la conjecture de Catalan !

INVALIDATION DE LA CONJECTURE DE GARAMBOIS N°7 FORTE PAR PAUL ZIMMERMANN

On peut facilement démontrer par récurrence que si on a $p_{i+1}=(k-1)*p_i+k$, *alors,*

$p_i = (k-1)^i p_0 + k/(k-2)*[(k-1)^i-1] = k/(k-2)*[(k-1)^i-1] \bmod p_0$
Soit i pris comme l'ordre multiplicatif de k-1 mod p_0, alors cela nous assure que p_i est divisible par p_0.

Exemple :

$p_0=7$, $k=4$
L'ordre multiplicatif de k-1 modulo p_0 est 6, car 6 est le plus petit entier c>0 tel que $(4-1)^c$ soit congru à 1 modulo 7.
Cela nous assure que p_6 (qui vaut 6559) sera divisible par p_0 (qui vaut 7) et cela suffit pour montrer que tous les p_i ne seront pas premiers quel que soit i.

CQFD