Changement de parité

Démontrons que $\sigma''(n)$ est impair si et seulement si n est un carré parfait ou le double d'un carré parfait :

Démonstration 1 *$\sigma''(n) = |\sigma(n) - 2n)|$ donc $\sigma''(n)$ et $\sigma(n)$ ont même parité.*
Or si :

$$n = 2^u p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$$

avec $u \in \mathbb{N}$ et $p_1 \dots p_i$ premiers

On a :

$$\sigma(n) = (2^{u+1} - 1) \prod_{k=1}^{i} \frac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k - 1} = (2^{u+1} - 1) \prod_{k=1}^{i} (1 + p_k + \dots + p_k^{\alpha_k})$$

Mais $(2^{u+1} - 1)$ est impair.
Donc la parité de $\sigma(n)$ est aussi celle de $\displaystyle\prod_{k=1}^{i}(1 + \alpha_k)$.
D'où $\sigma(n)$ impair $\Leftrightarrow$ tous les α_k sont pairs, soit $\alpha_k = 2b_k$, $b_k \in \mathbb{N}$

Alors

$$n = 2^u p_1^{2b_1} \dots p_i^{2b_i}$$

$$\begin{array}{llll} \textit{Par conséquent :} & \textit{si } u = 2q + 1 & n = 2(2^q p_1^{b_1} \dots p_i^{b_i})^2 & = 2m^2 \\ & \textit{si } u = 2q & n = (2^q p_1^{b_1} \dots p_i^{b_i})^2 & = m^2 \end{array}$$

CQFD !

Quelques records d'exceptions :

Jusqu'à 100000000, il y a un nombre pair, 89975492 qui est le départ d'une séquence de suite aliquote de 42 termes à nombres uniquement pairs et strictement décroissante. Il y a plusieurs nombres impairs dont le plus petit est 2551185 qui sont les départs de séquences de suites aliquotes de 6 termes à nombres uniquement impairs et strictement croissantes. Ces deux longueurs de séquences de 42 et 6 termes sont pour l'instant les longueurs records que j'ai trouvées. Rien n'assure qu'il y a une limite à ce genre de records !

Plus généralement, je peux tracer une courbe avec en abscisse les entiers i et en ordonnée le nombre de nombres pairs sur un intervalle donné qui sont les départs de séquences strictement décroissantes de i termes uniquement pairs. L'étude de la forme de cette courbe doit être intéressante. Idem pur les séquences d'impairs croissantes de longueur i. Je n'ai pas fait ces travaux !