1 Pourquoi $\dfrac{\sigma'(n)}{n}$ peut-il être aussi grand que l'on veut, en choisissant n assez grand ?

Cela est équivalent à se poser la même question sur $\dfrac{\sigma(n)}{n}$ car si $\dfrac{\sigma(n)}{n}$ est très grand, alors $\dfrac{\sigma'(n)}{n} = \dfrac{\sigma(n)-n}{n} = \dfrac{\sigma(n)}{n} - 1$ aussi très grand (1 devient négligeable par rapport à $\dfrac{\sigma(n)}{n}$).

En écrivant la décomposition de n en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$$

On a

$$\sigma(n) = \prod_i \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

D'où :

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\displaystyle\prod_i \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}}{\displaystyle\prod_i p_i^{\alpha_i}} \tag{1}$$

Lorsque l'exposant α_i du nombre premier p_i devient très grand, on néglige le terme -1 par rapport à $p_i^{\alpha_i+1}$dans le numérateur de l'équation (1).
Donc pour un nombre entier n n'ayant que de grands exposants dans sa décomposition en facteurs premiers, $\frac{\sigma(n)}{n}$ peut être assimilé à :

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_i \frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)} = \prod_i \frac{p_i}{p_i - 1} \tag{2}$$

Il nous reste donc à savoir si le produit (2) qui s'écrit aussi :

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots p_i \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (p_i - 1) \cdots}$$

en prenant ainsi tous les nombres premiers jusqu'à l'infini, si ce produit a une limite, ou s'il est infini.
La réponse est qu'il est infini, mais nous ne le démontrerons pas ici. Ce travail peut se trouver dans certains ouvrages comme par exemple "Introduction à la théorie des nombres" de Jean-Marie Koninck et Armel Mercier, éditions Modulo.
Exemple d'un nombre entier n tel que $\dfrac{\sigma'(n)}{n} = \dfrac{\sigma(n)}{n} - 1$ est assez grand :
$n = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdots p)^{1000}$, p étant un nombre premier assez grand !
Pour faire ici une petite parenthèse, on peut parler des nombres multi-parfaits. Un nombre parfait est un nombre n tel que $\sigma'(n) = n$ ou tel $\sigma(n) = 2n$ que ce qui revient au même.
Un nombre tri-parfait est un nombre n tel que $\sigma(n) = 3n$, un quadri-parfait tel que $\sigma(n) = 4n$, un penta-parfait tel que$\sigma(n) = 5n$ etc. . .
On connaît ainsi de tels nombres j-parfaits (des hexa-parfaits ou 6-parfaits, des hepta-parfaits ou 7-parfaits et même plus loin), d'autant plus grands que j est grand. Ce que

nous disions précédemment nous laisse supposer qu'il ne serait pas absurde de chercher des nombres 1000-parfaits qui existent probablement (mais alors de quelle taille!!!)

Pourquoi il est donc difficile de prévoir le nombre maximal de chiffres d'un nombre d'une suite aliquote à un indice donné ?

Parce que quand on est assez loin dans une suite aliquote à statut inconnu à un indice i et que les nombres sont alors assez grands, en passant à l'indice $i+1$, il se peut que l'on «tombe» sur un nombre vraiment beaucoup plus grand que celui de l'indice i (nous venons de voir que $\frac{\sigma'(n)}{n}$ peut atteindre n'importe quelle taille)!
Mais ce qui complique tout, c'est qu'il est très certainement très improbable que le facteur de croissance soit aussi grand à chaque étape de la suite aliquote. Parfois, en passant à l'indice suivant, le nombre se contentera de doubler ou même moins s'il n'amorce tout simplement pas une "redescente"!

2 La moyenne du rapport $\sigma'(n)/n$ peut être évaluée pour tous les entiers n (K) pour les entiers n uniquement pairs (K_p), pour les entiers n uniquement impairs (K_i) ou pour tous les multiples d'un nombre premier p quelconque (K_q)

Détermination de manière théorique de K

Cette démonstration à été faite par Cédric BARRET en s'inspirant de celles données dans l'ouvrage « Introduction à la théorie des nombres », de Jean-Marie De Koninck et de Armel Mercier, Modulo.
Dans un premier temps, nous écrivons les entiers de 1 à N sur une colonne à gauche et tous leurs diviseurs à leur droite sur la même ligne.

1	1										
2	1	2									
3	1		3								
4	1	2		4							
5	1				5						
6	1	2	3			6					
7	1						7				
8	1	2		4				8			
9	1		3						9		
10	1	2			5					10	
11	1										11
12	1	2	3	4		6					
13	1										
14	1	2					7				
15	1		3		5						
16	1	2		4				8			
17	1										
18	1	2	3			6			9		
19	1										
20	1	2		4	5					10	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$								
N	$e = N$	$\cdots$	$\cdots$	$e = 5$	$e = 4$	$e = 3$				$e = 2$	$e = 1$

La définition de $\sigma(n)$ nous donne la relation suivante :

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

On dit ainsi que $\sigma(n)$ est égal à la somme des nombres d tels que d divise n.

Ensuite on écrit la somme des $\sigma(n)$ pour tous les n allant de 1 à N. On somme donc *par lignes* tous les nombres à droite de la colonne des entiers de 1 à N sur notre shéma.

$$\sum_{n\leq N}\sigma(n)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{d|n}d$$

Si on transforme cette somme *par lignes* en une somme *par diagonales* comme indiqué sur le schéma (pour la première diagonale $e=1$, pour le deuxième $e=2$, ...,jusqu'à $e=N$), nous obtenons (étant donné que les nombres sur les diagonales ne sont que les entiers naturels dans l'ordre) :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq N}\sigma(n) &= \sum_{n\leq N}\sum_{d|n}d\\ &= \sum_{e\leq N}\sum_{d\leq \frac{N}{e}}d\\ &= \sum_{e\leq N}\frac{\frac{N}{e}(\frac{N}{e}+1)}{2}\\ &= \frac{N^2}{2}\sum_{e\leq N}\frac{1}{e^2}+o(N\sum e\leq N\frac{1}{e})\\ &= \frac{\pi^2N^2}{12}+o(N\ln N)\end{aligned}$$

En effet, $\displaystyle\sum_{e\leq N}\frac{1}{e^2}\underset{N\to+\infty}{=}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, avec ζ représentant la fonction zeta de Riemann.

Notre but est finalement ici de calculer K, le rapport moyen $\dfrac{\sigma'(n)}{n}$, pour tous les entiers n.

Hypothèse : on suppose ici que $\dfrac{\sigma'(n)}{n}$ vaut en moyenne : $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sigma'(n)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n}$

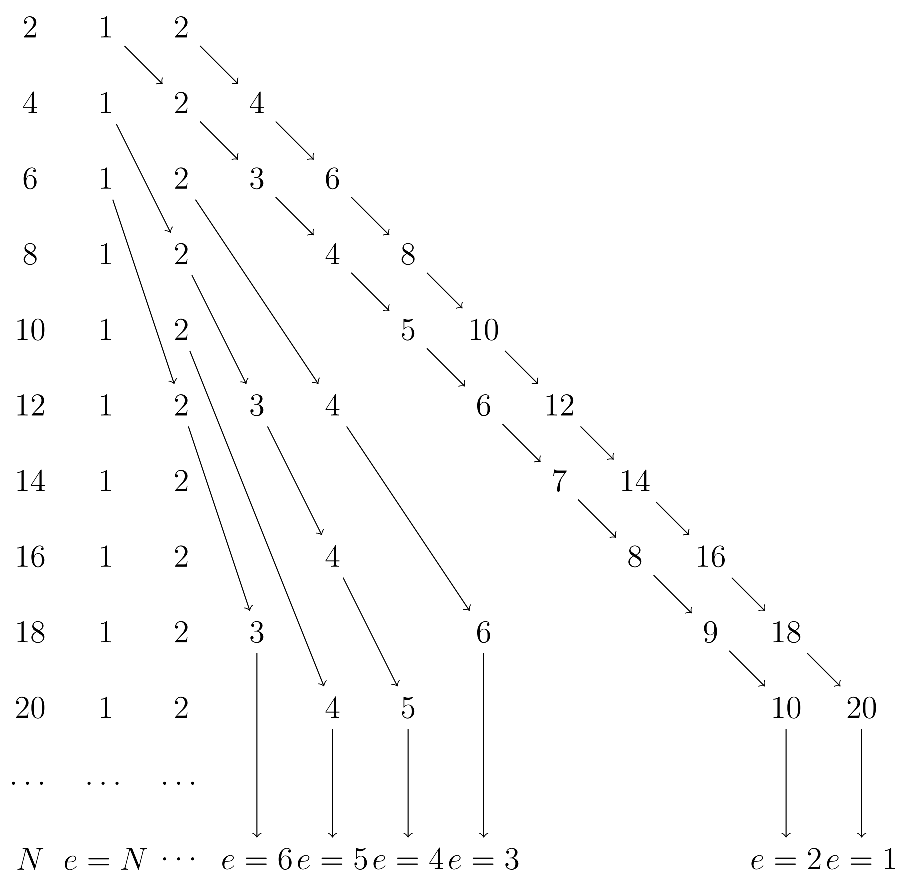
D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sigma'(n)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n} &= \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sigma(n)-n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n} && = \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sigma(n)-\sum_{n=1}^{N}n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n} \\
&\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\dfrac{\pi^2N^2}{12}-\dfrac{N(N+1)}{2}}{\dfrac{N(N+1)}{2}} && = \frac{(\pi^2-6)N-6}{6(N+1)} \\
&\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2-6}{6} && = K
\end{aligned}$$

Détermination de manière théorique de K_p et K_i

Pour cela, on cherche à calculer la somme des $\sigma(n)$ pour les n seulement pairs.

On procède de manière analogue : on fait le schéma et on regarde avant d'écrire les calculs :



Lorsque e est impair, on a une diagonale de nombres pairs. Lorsque e est pair, on a une diagonale de tous les entiers.

On écrit donc tous les calculs en partant comme pour le travail précédent :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=2 \\ n\ pair}}^{N} \sigma(n) &= \sum_{\substack{n\leq N \\ n\ pair}} \sum_{d|n} d \\
&= \sum_{\substack{e<N \\ e\ pair}} \sum_{d\leq \frac{N}{e}} d + 2 \sum_{\substack{e<N \\ e\ impair}} \sum_{d\leq \frac{N}{2e}} d \\
&= \sum_{\substack{e<N \\ e\ pair}} \frac{\frac{N}{e}(\frac{N}{e}+1)}{2} + 2 \sum_{\substack{e<N \\ e\ impair}} \frac{\frac{N}{2e}(\frac{N}{2e}+1)}{2}
\end{aligned}$$

On néglige tout de suite les termes en N pour ne garder que ceux en N^2, ce qui donne :

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n\ pair}}^{N} \sigma(n) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{e<N \\ e\ pair}} \frac{N^2}{e^2} + \frac{1}{4}\sum_{\substack{e<N \\ e\ impair}} \frac{N^2}{e^2}$$

$$= N^2\Big(\frac{1}{4}\sum_{\substack{e<N \\ e\ pair}} \frac{1}{e^2} + \frac{1}{4}\sum_{\substack{e<N \\ e\ pair}} \frac{1}{e^2} + \frac{1}{4}\sum_{\substack{e<N \\ e\ impair}} \frac{1}{e^2}\Big)$$

$$= N^2\Big(\frac{1}{4}\sum_{\substack{e<N \\ e\ pair}} \frac{1}{e^2} + \frac{1}{4}\sum_{e<N} \frac{1}{e^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}N^2\Big(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \sum_{e<N} \frac{1}{e^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}N^2\Big(\frac{1}{2^2}\big(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\big) + \sum_{e<N} \frac{1}{e^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}N^2\Big(\frac{1}{4}\sum_{e<N} \frac{1}{e^2} + \sum_{e<N} \frac{1}{e^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}N^2\Big(\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6}\Big)$$

D'où enfin :

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n\ pair}}^{N} \sigma(n) = \frac{1}{4}N^2\frac{5}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

Pour calculer la moyenne sur tous les n pairs et seulement pairs de $\frac{\sigma'(n)}{n}$, soit K_p, on procède de même que ce que nous avions fait ci-dessus avec tous les entiers pour calculer K, ce qui donne :

$$\frac{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} \sigma'(n)}{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} n} = \frac{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} \sigma(n) - n}{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} n} = \frac{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} \sigma(n) - \sum_{n\ pair}^{N} n}{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} n}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} \sigma(n)}{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} n} - 1 = \frac{\frac{1}{4}N^2\frac{5}{4}\frac{\pi^2}{6}}{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}-1)} - 1$$

$$\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{4}N^2\frac{5}{4}\frac{\pi^2}{6}}{\frac{N^2}{4}} - 1 = \frac{5}{4}\frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$= \mathrm{K}_p$$

On déduit K_i de K et K_p parce que K doit être la moyenne de K_p et K_i.

D'où, pour finir les trois valeurs théoriques (ou calculées) ci-dessous :

$$\mathrm{K} = \frac{\displaystyle\sum_{n}^{N} \sigma'(n)}{\displaystyle\sum_{n}^{N} n} = \frac{\pi - 6}{6}$$

$$\approx 0.644934066848$$

$$\mathrm{K}_p = \frac{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} \sigma'(n)}{\displaystyle\sum_{n\ pair}^{N} n} = \frac{5}{4}\frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$\approx 1.056167583560$$

$$\mathrm{K}_i = \frac{\displaystyle\sum_{n\ impair}^{N} \sigma'(n)}{\displaystyle\sum_{n\ impair}^{N} n} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} - 1$$

$$\approx 0.233700550136$$

On remarquera que $K_p = K + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}$.

On remarquera que $K_i = K - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}$.

A comparer avec les trois valeurs expérimentales ci-dessous, valeurs obtenues en faisant les calculs jusqu'à 10^9 :

$K = 0,6449340571$ ce qui correspond à 7 décimales à la valeur théorique plus haut !

$K_p = 1,0561675631$ ce qui correspond à 7 décimales à la valeur théorique plus haut !

$K_i = 0,2337005502$ ce qui correspond à 9 décimales à la valeur théorique plus haut !

Cas général : détermination de manière théorique de K_q

En procédant de même que ci-dessus, on arrive assez facilement à calculer un coefficient théorique K_q général qui est la somme des $\sigma'(n)$ divisée par la somme des n, les nombres n étant les multiples du nombre premier q. Ce nombre vaut après démonstration :

$$K_q = \frac{\pi^2}{6}\frac{q^2 + q - 1}{q^2} - 1$$

Notons que pour $q = 2$, on retrouve le coefficient théorique donné ci-dessus à savoir :
$(5/4)(\pi^2/6) - 1$
Ces coefficients théoriques correspondent bien aux expérimentaux, je l'ai vérifié !
Notons que si q n'est pas premier, le calcul doit être très compliqué !
Notons que pour q donné, on a q coefficients en réalité : K_q qui est en fait égal à $K_q = K_{0 \ mod \ q}$ et les $q - 1$ autre coefficient tous égaux : $K_{1 \ mod \ q}$, $K_{2 \ mod \ q}$, $K_{3 \ mod \ q}$, $\ldots$, $K_{q-1 \ mod \ q}$. Cédric BARRET s'est demandé si on pouvait aussi calculer ces derniers coefficients théoriquement ? Après des essais numériques, s'il y a un résultat à trouver, c'est que la moyenne de tous les coefficients vaut $K = 0,64493\ldots$. Cela reste à démontrer...