On note p_k le k-ième nombre premier. On pose $t_1 = 2$ et pour tout $k \geq 1$, on pose $t_{k+1} = \varphi(p_k^{t_k+1} \cdot (p_{k+1} - 1)) - 1$ où φ est la fonction d'Euler. Pour tout $l \geq 1$, on note $A_k = \{m \mid \text{ pout tout } 1 \leq i \leq k \; val_{p_i}(m) = t_i\}$ l'ensemble des entiers dont la factorisation commence par le "driver" $p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$. On note $s(m) = \sigma(m) - m$.

Théorème 1 *(Lenstra 76) Pour tout $k \geq 2$, si $m \in A_k$ alors $s(m) \in A_{k-1}$.*

preuve: Soient $k \geq 2$ e/qui vaut $m \in A_k$. Alors il existe $B \in \mathbb{N}$ premier avec $p_1, \dots, p_k$ tel que $m = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k} B$. On calcule $s(m) = \sigma(p_1^{t_1}) \dots \sigma(p_k^{t_k})\sigma(B) - p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k} B$. Montrons que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $\sigma(p_{i+1}^{t_{i+1}})$ est divisible par $p_i^{t_i+1}$. On a $\sigma(p_{i+1}^{t_{i+1}}) = \frac{p_{i+1}^{t_{i+1}+1}-1}{p_{i+1}-1}$ qui vaut $\frac{p_{i+1}^{\varphi(p_i^{t_i+1}(p_{i+1}-1))}-1}{p_{i+1}-1}$ par construction de t_{i+1}. Rappellons le petit théorème de Fermat: pour tout $n \in \mathbb{N}$ et a tel que $pgcd(a, n) = 1$ on a $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \mod n$. On applique le théorème avec $a = p_{i+1}$ et $n = p_i^{t_i+1}(p_{i+1} - 1)$ et on obtient $p_{i+1}^{\varphi((p_i^{t_i+1}(p_{i+1}-1))} - 1 \equiv 0 \mod p_i^{t_i+1}(p_{i+1} - 1)$, ce qui équivaut à $p_i^{t_i+1} \mid \sigma(p_{i+1}^{t_{i+1}})$. On déduit directement que $val_{p_i}(s(m)) = t_i$. Donc $s(m) \in A_{k-1}$. $\square$

Corollaire 1 *(conjecture de Garambois n.2) Pour tout $k > 1$ et tout $l \in \mathbb{N}$, il existe une suite d'Aliquote telle que pour l itérations consécutives, on a $\frac{s(m)}{m} > k$.*

preuve: On utilise la formule de Mertens $\Sigma_{p \text{ premier}, p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log\log x$. En particulier $\Sigma_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$ diverge et le produit $\Pi_{p \text{ premier}}(1 + \frac{1}{p})$ va à l'infini. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Pi_{i=1}^{n}(1 + \frac{1}{p_i}) > k + 1$. On choisit m_0 un élément de A_{n+l}. Par le théorème de Lenstra, les $l + 1$ premières itérations de la suite Aliquote qui commence à m_0 sont respectivement dans $A_{n+l}, A_{n+l-1}, \dots, A_n$. Soit $k \in [0, l]$, alors $m := s^k(m_0)$ est dans A_{n+k} donc peut s'écrir $p_1^{t_1} \dots p_{n+k}^{t_{n+k}} B$ pour un entier B copremier avec $p_1, \dots, p_{n+k}$. On a $\frac{s(m)}{m} = \frac{\sigma(m)}{m} - 1$ et $\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{\sigma(B)}{B} \Pi_{i=1}^{n+k}(1 + \frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_i^{t_i}}) \geq \frac{\sigma(B)}{B} \Pi_{i=1}^{n+k}(1 + \frac{1}{p_i}) \geq \frac{\sigma(B)}{B} \Pi_{i=1}^{n}(1 + \frac{1}{p_i})$ qui est plus grand que $\frac{\sigma(B)}{B}(k + 1)$ par le choix de n. Finalement $\sigma(B)$ est la somme des diviseurs de B, y compris B, donc $\sigma(B) > B$. Ainsi $\frac{\sigma(m)}{m} > k + 1$, d'où $\frac{s(m)}{m} > k$. $\square$